10-я Молодежная летняя школа-конференция
по геометрическим методам
математической физики

10–16 июля 2023 г.

НАУКА
И УНИВЕРСИТЕТЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЕ
ПРОЕКТЫ
РОССИИ

SIMC
Steklov International Mathematical Center

МИАН

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Организации

Математический центр мирового уровня
«Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук»
(МЦМУ МИАН), г. Москва

Лаборатория геометрических методов математической физики
имени Н. Н. Боголюбова МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке
Минобрнауки России
(грант на создание и развитие МЦМУ МИАН,
соглашение No 075-15-2022-265).

Аннотации минікурсов и докладов

Миникурсы

Мультипликативный хаос

А. И. Буфетов

МИАН

(к 120-летию Андрея Николаевича Колмогорова и 90-летию Игоря Владимировича Гирсанова)

Идея мультипликативного хаоса восходит к работам Андрея Николаевича Колмогорова по гидродинамической турбулентности (1940). Математически строгую теорию построил Жан-Пьер Кахан в 1986м. Замечательное открытие Кахана состоит в том, что отнормированную экспоненту случайного поля можно определить как случайную меру. Если случайный процесс, по определению, ставит точке фазового пространства в соответствие случайную величину, то случайное поле сопоставляет случайную величину гладкой наблюдаемой: иными словами, речь идет о случайных обобщенных функциях. Замечательным образом, экспонента такого случайного поля может быть определена и является случайной мерой, как и экспонента случайного процесса. В не предполагающем предварительных знаний вводном курсе мы подробно рассмотрим построение гауссова мультипликативного хаоса, опираясь, в том числе, на элементарные конструкции Натанаэля Берестицкого (2015) и, в критическом случае, Юбэра Лакуана (2022), основанные на теореме Гирсанова.

Введение в интегрируемые системы

А. В. Зотов

МИАН

Будут обзорно описаны основные структуры, описывающие классические интегрируемые системы, включая уравнения Лакса и классические r-матричные структуры. Приведем примеры систем частиц, моделей Годена и спиновых цепочек. Также обсудим RTT-соотношения и квантовые интегрируемые системы.

Перечисление карт

М. Э. Казарян

НИУ ВШЭ

Миникурс посвящен различным аспектам задачи перечисления карт (ленточных графов, детских рисунков). Эта, казалось бы, чисто комбинаторная задача возникла, в действительности, из матричных моделей математической физики и имеет удивительные связи с теорией представлений, пространствами модулей, теорией Громова–Виттена, и интегрируемыми системами. Оказалось, в частности, что производящая функция, перечисляющая карты, обладает удивительными интегрируемыми свойствами: соотношениями Вирасоро, КП-интегрируемостью, топологической рекурсией. В многом, перечисление карт является модельным примером для изучения свойств интегрируемости, возникающих в большом количестве более сложных задач математической физики.

Рациональные функции на спектральных кривых и коммутирующие разностные операторы

А. Е. Миронов

ИМ СО РАН

В двух лекциях будет рассказано как, с помощью некоторого множества рациональных функций на алгебраической спектральной кривой можно строить коммутирующие разностные операторы. Будет также рассказано, как с помощью предельного перехода из коммутирующих разностных операторов получать обыкновенные коммутирующие дифференциальные операторы.

Метрики диагональной кривизны и связанные с ними интегрируемые системы дифференциальной геометрии и математической физики

О. И. Мохов

МГУ

Метрики диагональной кривизны возникли ещё в классической дифференциальной геометрии при изучении сопряжённых и ортогональных сетей в евклидовом пространстве и ортогональных координат в различных римановых пространствах. Новый интерес к метрикам диагональной кривизны был вызван развитием теории интегрируемых систем математической физики и открытием примерно сорок лет назад

С.П.Царёвым замечательного класса полугамильтоновых систем гидродинамического типа, интегрируемых методом обобщённого годографа. Каждой полугамильтоновой системе гидродинамического типа соответствуют метрики диагональной кривизны, и наоборот, любая метрика диагональной кривизны порождает полугамильтоновы системы гидродинамического типа. При этом сама геометрия метрик диагональной кривизны изучена недостаточно, и остаётся много открытых вопросов. Недавно в моих работах было найдено эффективное необходимое условие на метрики диагональной кривизны, связанное с геометрией Хантьеса. В миникурсе будет рассказано о классических и современных задачах дифференциальной геометрии и теории интегрируемых систем, связанных с метриками диагональной кривизны, включая открытые проблемы.

Симплектическая и лагранжева геометрия комплексной проективной плоскости

Н. А. Тюрин

ОИЯИ

Комплексная проективная плоскость — базовый объект не только в алгебраической геометрии. В равной степени она важна и как один из первых нетривиальных примеров гладкого компактного 4-мерного многообразия, а в симплектической геометрии она является и первым главным примером компактного симплектического многообразия в размерности 4; в торической геометрии она снова выступает как один из первых примеров, на котором осваивается техника дальнейших исследований. Несмотря на кажущуюся простоту проективная плоскость подлежит главным гипотезам в гладкой топологии. Но нас будет интересовать другой вопрос, относящийся к геометрии симплектической. На проективной плоскости, снабженной стандартной кэлеровой формой, имеется вполне интегрируемая система, откуда появляются персонажи следующей после симплектической геометрии — лагранжевы торы. Интересно, что задача классификации лагранжевых подмногообразий далека от полного решения: имеется лишь некоторый набор фактов о топологии лагранжевых подмногообразий. Краткому обзору этой темы будут посвящены предлагаемые лекции.

Доклады

Кванды и их приложения

Рамиль Алиев

МГУ

Доклад посвящён одной из альтернативных алгебраических структур — квандлу. Сия структура является обобщением понятием группы, интенсивно применяется в маломерной топологии, прежде всего в построении инвариантов узлов и теории интегрируемых систем.

Произведения Масси в эквивариантных когомологиях момент-угол комплекса с действием координатного подтора

Петр Балабанов

МГУ

Первые семейства нетривиальных произведений Масси в момент-угол комплексах были описаны в [1, 2]. Хорошо известно, что для симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на m вершинах имеется вложение момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset D^{2m} \subset \mathbb{C}^m$, как следствие имеем естественное действие координатного подтора V_I на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ для любого $I \subset [m]$, ДГА-модель эквивариантных когомологий этого действия построена в [3]. До сих пор были неизвестны примеры нетривиальных произведений Масси в эквивариатных когомологиях $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, мной был найден подобный пример, использующий нерв-комплекс куба с усечёнными гранями.

[1] И.В. Баскаков. Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов. *УМН*, 58:199–200, 2003.

[2] И.Ю.Лимонченко. Произведения Масси в когомологиях момент-угол-многообразий 2-усеченных кубов. *УМН*, 71:207–208, 2016.

[3] И.К. Зейникешева, Т.Е. Панов. Эквивариантные когомологии момент-угол-комплексов относительно координатных подторов. *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, 317:157–167, 2022.

Инвариант самозацепления как простейший инвариант конечного типа

Эдуард Бирючевский

СПбГУ

В данном докладе мы определим инвариант зацепления и инвариант самозацепления узла с помощью методов, которые используются в теории инвариантов конечного типа.

Частный случай минимальных кос

Анастасия Вахрина

СПбГУ

Для любого узла существуют косы, из которых этот узел может быть получен с помощью замыкания Александера. Если узел, полученный из косы, нельзя получить замыканием косы с меньшим числом нитей, то коса называется *минимальной*. Положительные GMM-косы — интересный класс кос, обладающих в частности свойством минимальности. У него есть несколько разных определений, которые мы разберём. Также мы поговорим про некоторые свойства GMM-кос и сформулируем ряд открытых гипотез (затронув, например, операцию каблирования и многочлен HOMFLY-PT).

Спектральные характеристики Лапласиана на поверхностях с коническими особенностями

Александра Волобуева

МГУ

Работа посвящена описанию собственных значений и собственных функций оператора Лапласа на поверхностях с коническими особенностями. Особенность данной задачи в том, что поверхность не гладкая, и для корректного определения оператора Лапласа используется теория самосопряженных расширений. В докладе решена спектральная задача для оператора Лапласа на ряде поверхностей с коническими особенностями. Явно описаны собственные функции и приведены соотношения на собственные значения в случае обыкновенного конуса и для поверхности, полученной из двух конусов, склеенных по параллели. Также рассмотрены поверхность из четырех конусов (но с двумя коническими особенностями) и общий случай — подобная поверхность, составленная из произвольного числа конусов. В последнем случае описан алгоритм, позволяющий построить собственные функции и получить соотношения на собственные значения.

Струнная топология

Фёдор Вылегжанин

МГУ

Для каждого топологического пространства X определено свободное пространство петель $LX = Map(S^1, X)$. Если X — многообразие, на гомологиях LX возникает богатая алгебраическая структура, впервые описанная в работе Chas, Sullivan «String topology». Я расскажу, что это за структура и (если успею) как с ней связать топологическую квантовую теорию поля.

Эффекты квантовой декогеренции в осцилляциях нейтрино

Максим Вялков

МГУ Саров

Изучение нейтрино крайне актуальная и важная задача. Нейтрино обладает уникальными свойствами, которые полностью не описываются в рамках стандартной модели. В данной работе проведены изучения механизмов возникновения квантовой декогеренции нейтрино. В ходе настоящей работы был предложен новый механизм квантовой декогеренции массовых состояний для произвольного взаимодействия. Получены выражения для операторов Лимблада. Найден физический смысл для параметров квантовой декогеренции. Получено выражение для квантовой декогеренции нейтрино за счет взаимодействия с произвольным безмассовым бозоном. Получены выражения коэффициентов квантовой декогеренции нейтрино за счет взаимодействия с произвольным безмассовым бозоном. Получены выражения для коэффициентов квантовой декогеренции за счет взаимодействия с аксионом, фотоном и гравитоном.

Меры Гротендика на разбиениях

Светлана Гаврилова

НИУ ВШЭ / Сколтех

Я расскажу про вероятностные меры на разбиениях, построенные с помощью симметричных полиномов Гротендика. Они являются аналогами мер Шура, введённых Окуньковым в 2001 году. Несмотря на схожесть детерминантных формул для весов, меры Гротендика не обладают структурой детерминантного точечного процесса. Исследование этого вопроса связано с задачей о нахождении соотношений между главными минорами, приходящей из алгебраической геометрии. Однако, меру Гротендика можно вложить в двумерной процесс Шура, который является детерминантным. Это позволяет получить результат о предельной форме для случайных разбиений Гротендика. Предельная кривая не выражается явно и возникает из сечения поверхности предельной формы процесса Шура.

Гиперболические устойчивые многочлены и полная положительность

Денис Голицын

ЯрГУ

В моем докладе я выражу условие гиперболичности и устойчивости вещественного многочлена в терминах осцилляционности некоторой ассоциированной с ним матрицы. Результат использует технику цепей Штурма, а также классические теоремы и утверждения о полностью положительных матрицах, сформулированные Гантмахером и Крейном. Полученное условие тесно связано с теплицевой положительностью и задачей параметризации специальных клеток положительных многообразий.

Скорость сходимости предельной теоремы для точечного процесса с ядром Бесселя

Сергей Горбунов

МФТИ

Характеристическая функция $\phi(k)$ линейного функционала $f(x) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}_+) \cap \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+)$ детерминантного точечного процесса с ядром Бесселя равна определителю Фредгольма линейного оператора на $\mathbb{L}_2([0,1])$ со следующим интегральным ядром:

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} t\sqrt{xy} J_\nu(xt) J_\nu(yt)(e^{ikf(t)} - 1)dt,$$

где J_ν — функция Бесселя порядка ν. Нас интересует асимптотическое поведение распределения линейного функционала для $f\left(\frac{x}{\tau}\right)$ при $\tau \to \infty$. Это соответствует определителю оператора выше на $\mathbb{L}_2([0,\tau])$. Обозначим его за $B(e^{ikf}-1)$, а P_τ за проекцию на $\mathbb{L}_2([0,\tau])$. Положим $B(1)=I$. Басор доказала, что при определённых условиях на b выполнена следующая асимптотическая формула:

$$\det(P_\tau B(e^b)P_\tau) \sim \exp\left(\tau\hat{b}(0) - \frac{\nu}{2}b(0) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x(\hat{b}(x))^2 dx\right), \quad \tau \to \infty,$$

где $\hat{b}$ обозначает преобразование фурье чётного продолжения b. Аналогичная формула существует и для синус-процесса. Для последнего при этом есть и точное выражение для определителя, позволяющее оценить скорость сходимости. Его аналогом для ядра Бесселя будет:

$$\det(P_\tau B(e^b)P_\tau) = \exp\left(\tau\hat{b}(0) - \frac{\nu}{2}b(0) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x(\hat{b}(x))^2 dx\right)\det(Q_\tau W(e^{b_-})B(e^{-b})W(e^{b_+})Q_\tau),$$

где $b = b_+ + b_-$ — разложение чётного продолжения b на функции с положительными и отрицательными частотами соответственно, $W(b)$ — оператор Винера-Хопфа с символом b, а $Q_\tau = I - P_\tau$. Тогда выражением для скорости сходимости будет:

$$|\det(Q_\tau W(e^{b_-})B(e^{-b})W(e^{b_+})Q_\tau) - 1| \leq C_\nu \frac{\|e^{b_+}\|_{\mathbb{L}_\infty}\|e^{b_-}\|_{\mathbb{L}_\infty}\|e^{-b}\|_{\dot{\mathcal{S}}}}{\sqrt{\tau}},$$

где введена следующая полунорма:

$$\|a\|_{\dot{\mathcal{S}}} = \|a\|_{\dot{H}_1} + \|a\|_{\dot{H}_2} + \|a''\|_{\mathbb{L}_1} + \|ta'''(t)\|_{\mathbb{L}_1},$$

а C_ν — некоторая константа, зависящая только от порядка функции Бесселя.

Пуассоновы структуры Фейгина–Одесского

Леонид Городецкий

НИУ ВШЭ

Если задано линейное (или произвольное стабильное) расслоение V на эллиптической кривой C, то его расширения при помощи тривиального линейного расслоения $\mathcal{O}_C$ параметризуются проективным пространством $P = \mathbb{P}Ext^1(V, \mathcal{O}_C)$. Так как различные расширения могут давать одно и то же векторное расслоение E, то P разбивается на классы изоморфизма E. Скобки Фейгина–Одесского — это определенная пуассонова структура на P, которая позволяет описать классы изоморфизма E: локально они являются симплектическими листами скобок Фейгина–Одесского. Я расскажу идею нового определения скобок Фейгина–Одесского через дифференциал на втором листе некоторой спектральной последовательности, а также как из этого определения вытекает упомянутый факт о симплектических листах.

Действия дискретного тора сложности один в случае малых накрытий

Владимир Горчаков

НИУ ВШЭ

Пусть дискретный тор ^{k} эффективно действует на гладком компактном n-мерном многообразие X^n. Тогда число $n-k$ называется сложностью действия. В своем докладе я расскажу о действиях сложности 1 в случае когда X^n является малым накрытием, вещественным аналогом квазиторического многообразия. Основным результатом будет следующая теорема:

Пусть X^n — ориентируемое малое накрытие, тогда в ^{n} существует подгруппа $G \cong {}^{n-1}$ индекса 2, такая что пространство орбит X/G гомеоморфно сфере S^n.

В ходе доклада я сформулирую все необходимые определения и примеры, а также расскажу набросок доказательства.

Связь тензорных категорий и квантовых групп

Илья Данилин

МФТИ

Будет введение в стандартную теорию квантовых групп, а потом я расскажу, почему лучше не думать что это алгебра Хопфа, а некоторое её обобщение.

Нечетные переменные в математике и их применение в геометрии

Даниил Дорошенко

МГУ

Мы обсудим некоторые аспекты алгебры антикоммутирующих (нечетных) переменных, в частности, будет построен интеграл Березина, будет показана его связь пфаффианом.

Целозначные целые функции

Вячеслав Егоров

МГУ

В 1915 году Дьёрдь Пойа опубликовал статью, в которой доказал следующие теоремы.

Теорема 1 Если $f(z)$ — целая функция такая, что $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$, $lim_{R\to\infty} \frac{R^{\frac{1}{2}} max_{|z|=R}|f(z)|}{2^R} = 0$, тогда $f(z)$ — многочлен.

Теорема 2 Если $f(z)$ — целая функция такая, что $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$, $lim_{R\to\infty} \frac{R^{\frac{3}{2}} max_{|z|=R}|f(z)|}{(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^R} = 0$, тогда $f(z)$ — многочлен.

Позже Харди опубликовал статью, в которой показал, что утверждения теорем справедливы, если заменить $R^{\frac{1}{2}}$ и $R^{\frac{3}{2}}$ на 1, R соответственно. Доклад будет содержать более простое доказательство теоремы 2, принадлежащее автору, основанное на применении разностных операторов, а также обзор основных достижений в этой области науки.

Минимальные подмногообразия со свободной границей вне шара.

Алексей Кислицын

МГУ

В докладе будет дан обзор результатов, касающихся существования минимальных гиперповерхностей со свободной границей вне шара в пространствах Шварцшильда и евклидовых. Известен класс катеноидальных поверхностей. Однако в евклидовом пространстве других примеров не построено даже в трехмерном случае. Более того, доказано, что при определенных ограничениях на регулярность концов поверхность оказывается катеноидальной. В докладе будут обсуждаться соответствующие утверждения.

Построение полугамильтоновых систем гидродинамического типа по алгебро-геометрическим данным

Михаил Климов

МГУ

Доклад посвящен применению обобщения алгебро-геометрической конструкции Кричевера для построения полугамильтоновых диагональных систем гиродинамического типа, развитой в работе О.И.Мохова и Е.В.Глухова. Впервые общий гамильтонов формализм для систем гидродинамического типа был предложен в работе С.П.Новикова и Б.А.Дубровина. С.П.Царев в работе ввел понятие полугамильтоновх систем гидродинамического типа и доказал их интегрируемость обобщенным методом годографа. Как будет следовать из нижесказанного, проверка полугамильтоновости произвольной системы гидродинамического типа является задачей, представляющей только вычислительную сложность. Намного более сложной проблемой оказалось построение системы с таким свойством, так как она представляет из себя нелинейную задачу.

Непересекающиеся пути и дискретный синус-процесс

Никита Косенков

МГУ

Мой доклад (вероятно, постерный) будет о случайных замощениях, их связи с наборами непересекающихся путей, а также о мере максимальной энтропии марковских сдвигов и конструкции дискретного синус-процесса.

Сигма-модели и колчанные многообразия

Вячеслав Криворољ

МГУ, МИАН

Сигма-модели есть известный класс вариационных задач, описывающих критические точки отображений из двумерного риманова многообразия в многообразия произвольной размерности. Модели такого типа возникают как в физических (спиновые цепочки, теория струн, квантовая хромодинамика), так и в математических (дифференциальная и алгебраическая геометрии, зеркальная симметрия) контекстах, чем и обосновывается интерес в их изучении. Однако такие модели являются существенно нелинейными, и естественно возникает задача о нахождении для них полиномиального представления. В недавних работах открылись неожиданные связи данной задачи с теорией колчанных многообразий, теорией нильпотентных орбит полупростых алгебр Ли и их симплектических разрешений. В данном докладе планируется проиллюстрировать данные связи на примере сигма-модели, описывающей критические точки отображений из плоского двумерного пространства в грассманниан $Gr(m, n)$. Доклад преимущественно основан на работах https://arxiv.org/abs/2106.15598 и https://arxiv.org/abs/2306.04555.

Случайные блуждания в случайном потенциале

Андрей Кузовчиков

СПбГУ

Различные модели случайных блужданий плодотворно используются в задачах статистической физики. К примеру, при помощи них удаётся описать диффузию, образование сложных полимеров. В данном докладе предлагается рассмотреть задачу о случайном блуждании в случайном потенциале. Подробно остановимся на изучении одномерного варианта — модели Синая. Обсудим феноменологические аспекты явления, процедуру децимации — пример пространственной ренормализации.

Многочлен HOMFLYPT и открытые инварианты Громова-Виттена

Алексей Львов

СПбГУ

Будет объяснено, каким образом полиномиальные инварианты узлов позволяют инвариантно подсчитывать количество кривых всех родов с лагранжевыми граничными условиями в 3-мерных многообразиях Калаби–Яу. Доклад основан на совместных работах американского и шведского математиков Вивека Шенде и Тобиаса Экхольма.

Торические и квазиторические U- и SU- многообразия

Аида Мамаева

МГУ

Бухштабер и Рэй ввели семейство торических многообразий $B(n_1, n_2)$, порождающих кольцо Ω^U; также Панов и Лу в своей статье «On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings» ввели семейство образующих кольца Ω^U. Интересно, что торические многообразия не могут быть $SU-$ многообразиями, а некоторые квазиторические $SU-$ многообразия имеют минимальные $s-$ числа и представляют полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. В своем докладе я введу основные определения и факты в теории U- и SU-бордизмов.

Матричная теорема о деревьях и модель Изинга

Екатерина Маркина

МГУ

Доклад основан на работе В.Б.Приезжева «Задача о димерах и теорема Кирхгофа». Мы рассмотрим доказательство матричной теоремы о деревьях, представляющее собой упрощённый вариант комбинаторного решения модели Изинга. Данная технология имеет признаки универсальности, так как возникает в ходе решения различных задач.

Тракторный формализм как калибровочная теория поля

Михаил Марков

МГУ

Тракторное исчисление — это удобный инструмент для работы с конформными многообразиями. В определённом смысле тракторный формализм в конформной геометрии является аналогом исчисления Риччи в псевдоримановой геометрии, так как позволяет изучать её в терминах некоторых ковариантных объектов и дифференциальных операторов. В частности, он оказывается крайне полезен в задаче о построении конформных инвариантов. В своём докладе я представлю новый взгляд на тракторную геометрию, определяющий её как некоторую калибровочную теорию поля, записанную в формализме Gauge PDE. Окажется, что эта теория тесно связана с гравитацией Эйнштейна. Также в докладе будет дано определение понятия

Gauge PDE и для его иллюстрации будет продемонстрировано некоторое количество стандартных примеров калибровочных теорий, записанных в этом формализме.

Аналитичность полугруппы операторов с генератором $\mathcal{A}$

Барият Меджидова

МГУ

Рассматривается задача Коши в сепарабельном гильбертовом пространстве H :

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) + \alpha A\frac{du}{dt}(t) + Au(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ \frac{du}{dt}(0) = u_1, \tag{2}$$

где A - самосопряженный, положительно определенный, имеющий компактный обратный оператор.

Ядро $K(t)$ определено следующим образом:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_i e^{-\gamma_j t}, \tag{3}$$

где $c_j > 0$ для $j = 1, 2, ...,$ $0 < \gamma_j < \gamma_{j+q} \longrightarrow \infty$. Причем $\gamma_1 < -d_0$ и выполнено условие:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1. \tag{4}$$

В данной работе строится полугруппа операторов , порождаемая уравнением (1). Также на основе ее свойств будут доказаны результаты о разрешимости задачи (1)-(2) и аналитичности решений. Наконец, будет получено представление решения в виде ряда из экспонент для случая, когда ядро вольтерровой свертки представляется в виде ряда из экспонент.

Приведение гладких функций к нормальным формам вблизи критических точек

Александра Оревкова

МГУ

Работа посвящена «равномерному» приведению гладких функций на 2-мерных многообразиях к каноническому виду вблизи критических точек с помощью некоторых замен координат в некоторых окрестностях этих точек. Для типов особенностей E_7 и D_n мы явно строим такие замены координат и оцениваем снизу (через C^r-норму функции) радиус искомой окрестности.

Представимость функтора когомологий с локальными коэффициентами

Андрей Рябичев

ВШЭ

В жизни когомологии возникают как препятствия к построению каких-то отображений. Довольно часто (например, при изучении конфигурационных пространств) база оказывается неодносвязной, и тогда коэффициенты группы когомологий, в которой лежит искомое препятствие, образуют локальную систему. В учебниках, однако, когомологии с локальными коэффициентами часто не рассматривают и с какого-то момента предполагают все пространства хорошими и односвязными.

С другой стороны, в курсе алгебраической топологии проходят теорему Брауна о представимости, которая говорит, что классы когомологий классифицируются классами гомотопии отображений в пространство Эйленберга–Маклейна. Я собираюсь рассказать про один из способов обобщить эту теорему на когомологии с локальными коэффициентами (а также обсудить все упомянутые выше понятия и факты подробно в меру имеющегося времени, сил и интереса аудитории).

Хвосты числа частиц на интервале в точечных процессах

Стефан Постников

МФТИ

Для детерминантных точечных процессов с эрмитовым ядром при некоторых условиях, которые выполняются, например, для синус-процесса, существует оценка на вероятность обнаружить больше k частиц на интервале. В работе рассматриваются пфаффианные точечные процессы, для которых корелляционные функции являются пфаффианом антисимметричной матрицы. Для пфаффианных точечных процессов ставится аналогичная задача по оценке.

Порождающее множество группы перекладываний прямоугольников

Ирина Пугачева

МГУ

Перекладывание прямоугольников (rectangle exchange transformation, RET_d) является естественным обобщением перекладывания отрезков (interval exchange transformation, IET). Именно, RET заключается в «разрезании» параллелепипеда $[0,1)^d$ на конечное число параллелепипедов и перестановке их таким образом, чтобы они вновь образовали параллелепипед $[0,1)^d$.

Рассмотрим в случае $\mathrm{IET} = \mathrm{RET}_1$ множество P всех отображений, ограничение которых на носитель является «вращением» – перекладыванием на двух отрезках. Нетрудно доказать, что P – порождающее множество для группы всех IET.

Оказывается, множество P', определяемое при $d > 1$ аналогично множеству P, тоже порождает RET_d. Однако доказательство этого факта требует больше усилий, поскольку аргументы, работающие при $d = 1$, неприменимы к случаю $d > 1$.

Доклад будет посвящен доказательству утверждения $< P' >= \mathrm{RET}_d$.

О классификации квазиоднородных особенностей и орбифолдовых Б-моделях Ландау–Гинзбурга

Антон Раровский

НИУ ВШЭ

Пусть задан квазиоднородный многочлен f, задающий изолированную особенность в нуле и G - подгруппа в группе его максимальных диагональных симметрий. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^*(f,G)$ орбифолдовой Б-модели (f,G), G-инвариантная часть которой изоморфна когомологиям Хохшильда G-искривлённой dg-алгебры $\mathsf{HH}^*(\mathbb{C}[X] \rtimes G, f) \cong (\mathcal{A}^*(f,G))^G$. Алгебра $\mathcal{A}^*(f,G)$ является обобщением фробениусовой алгебры Якоби $\mathrm{Jac}(f)$, важного инварианта особенности. В частности, $\mathcal{A}^*(f,G)$ является фробениусовой алгеброй и $\mathcal{A}^*(f,\{id\}) \cong \mathrm{Jac}(f)$. Известным результатом являются структурные константы алгебры $\ ^*(f,G)$ в случае, если f — так называемый обратимый многочлен. В данной докладе мы обсудим вопрос классификации квазиоднородных особенностей с помощью графов, опишем класс квазиоднородных многочленов, не являющихся обратимыми и соответствующих определённому типу графов, а также получим вид структурных константы алгебры $\mathcal{A}^*(f,G)$ для этого класса квазиоднородных многочленов.

Метод монодромии в двумерной CFT

Антон Селеменчук

СПбГУ

Для вычисления n-точечных корреляторов в двумерной конформной теории поля необходимо определение аналитической структуры конформных блоков. Конформные блоки зависят от стуктурных констант теории и в общем виде не выражаются в аналитическом виде. Однако в специальном случае удается установить аналитическую структуру конформных блоков, применяя т.н. метод монодромии Замолодчикова.

Доклад будет содержать обсуждение метода монодромии, а также его возможное континуальное обобщение в приложении к описанию коллапса BTZ черной дыры в трехмерной гравитации.

Синхронизация в модели Курамото

Алсу Сурмеева

МФТИ

В докладе рассмотрим различные модели для описания синхронизации, в основном наиболее известную из них — модель Курамото. Основной результат состоит в том, что для полных графов взаимодействий существует критическая константа связи, после которой система синхронизируется. Также обсудим модификации модели, особое внимание уделим модели Курамото-Сакагучи с шумом. Посмотрим на пример моделирования таких систем. Кроме того, кратко затронем информационную геометрию и ее применение в контексте синхронизации.

Алгебраические кривые и орнаменты точек ветвления в модели Годена

Илья Толстухин

НИУ ВШЭ

Модель Годена — это физическая модель, изначально введенная для описания взаимодействия нескольких заряженных частиц на прямой. Она состоит из n коммутирующих операторов-гамильтонианов, зависящих от n попарно различных комплексных параметров и действующих на тензорном произведении n неприводимых представлений алгебры Ли sl_2. Одна из важных задач модели Годена — диагонализовать эти операторы и понять, как меняется их совместный спектр при изменении параметров. В докладе будет рассказано, как устроены разветвленные накрытия пространства параметров совместным спектром гамильтонианов в случае $n = 3$. Базой таких накрытий является сфера Римана, а в качестве тотальных пространств выступают алгебраические кривые. Будет описана удивительная регулярность в расположении точек ветвления и устройстве монодромии накрытий Годена.

Исследование и анализ системы, описывающей модель «лес-биомасса»

Эльмира Тусупбекова

МГУ

В данной работе проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубки лесов, роста лесной промышленности, климатических факторов. Рассматривается возрастная структура лесной биомассы через деление на молодые (P) и зрелые (M) популяции. Для промышленных предприятий (I) накладывается ограничение на вырубку молодых популяций. В качестве альтернативных ресурсов для промышленных предприятий вводится модифицованная функция Лесли–Гоуэра. В работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется устойчивость решений системы, допускающей линеаризацию в окресности положений равновесия. Взаимодействие между величинами P, M, I описывается динамической системой:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) - \beta P + \gamma P, \tag{5}$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta P - q_1 EM - d_1 M, \tag{6}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\right) I - d_2 I, \tag{7}$$

где $P(0) \geqslant 0, M(0) \geqslant 0, I(0) \geqslant 0$, а r, β, k, γ, q_1, E, d_1, d_2 α_1, α_2, α_3 - действительные параметры.

В работе рассматриваются четыре биологически возможных положения равновесия системы. В ходе работы доказывается теорема, которая описывает условия при которых положения равновесия представляют собой устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый седлоузел, неустойчивый седлоузел. Для построения фазовых траекторий в трехмерном пространстве использовались библиотеки питона: $matplotlib.pyplot$,
$mpl_toolkits.mplot3d, scipy.integrate$.

В ходе работы проанализировано каждое уравнение системы по отдельности. Решения уравнений выражены в квадратурах. В работе было исследовано поведение решения первого уравнения на бесконечности.

В результате численного моделирования построены графики, соответствующие полученным в работе результатам при различных комбинациях значений параметров.

Литература

(1) Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков /И.В. Асташова // Современная математика и ее приложения, 2003. — Т. 8, 3—33с.

(2) Черепанов А.А. Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости / А.А. Черепанов // Открытое образование, 2017. — 41 — 52с.

(3) Chen F. On a nonlinear nonautonomous predator - prey model with diffusion and distributed delay / F. Chen // Comput Appl Math, 2014. — 33 — 49p.

(4) Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics / P.H. Leslie // Oxford University Press, 1948. — 213 — 245p.

(5) Manisha C., Joydip D.,Om P.M. A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction / C. Manisha , D. Joydip , P.M. Om // Springer International Publishing Switzerland, 2015. — 1—10p.

Экспоненциальные действия, задаваемые конфигурациями векторов

Руслан Хрулёв

МГУ

Пусть V — k-мерное вещественное векторное пространство, Γ — конфигурация m векторов в двойственном пространстве V^* такая, что их выпуклая оболочка порождает всё V^*. Тогда на m-мерном вещественном векторном пространстве можно определить экспоненциальное действие. Это действие является классическим примером динамической системы, восходящей к работам Пуанкаре. Можно выделить инвариантное подмножество $U(K)$ — дополнение до координатных подпространств, определяемое симплициальным комплексом K, на которое ограничивается действие. В докладе я расскажу про связь между топологией пространства орбит такого действия и линейными свойствами конфигурации Γ. Будет показана связь пространства орбит этого действия с момент-угол комплексом. В докладе также будет рассмотрен голоморфный случай экспоненциального действия и будут показаны его свойства.

Неожиданное применение леммы Шпернера

Дмитрий Царев

МФТИ

Пусть на плоскости нарисовано несколько связных компактных множеств так, что любые три из них можно пересечь одной прямой. Правда ли, что тогда можно нарисовать три прямые, которые будут пересекать каждое множество? Этот вопрос оставался неразрешённым десятки лет, пока в 2021 году Shira Zerbib и Daniel McGinnis не нашли короткое доказательство, неожиданно использующее непрерывную версию леммы Шпернера.

Кольца когомологий гиперболических многообразий типа Лёбелля

Дмитрий Цыганков

МГУ

Пусть многогранник P допускает компактную реализацию с прямыми углами в пространстве Лобачевского L^n. По многограннику строится прямоугольная группа Коксетера $G(P)$, которая действует отражениями на L^n. Имеется свободно действующая подгруппа H индекса 2^k, что позволяет строить гиперболическое многообразие вида L^n/H, которое представляет собой склейку 2^k копий многогранника P. Такие многообразия называются многообразиями типа Лёбелля и являются факторами вещественных момент-угол многообразий R_P по свободному действию группы $(Z_2)^{(m-k)}$, где m число гиперграней P.

Изучение многообразий Лёбелля интересно тем, что оно связывает между собой ряд областей , где имеются открытые проблемы: пространства с действием группы $(Z_2)^m$, прямоугольные группы Коксетера, прямоугольные многогранники, теория зацеплений.

Я расскажу, что происходит в случае склейки некомпактных многогранников конечного объёма (часть вершин на абсолюте) с прямыми углами в L^n:

1) Многообразия типа Лёбелля гомотопически эквивалентны фактору R_{K_P}/H, где K_P нерв-комплекс многогранника P — это тот же многогранник, из копий которого клеилось многообразие; изоморфно $(Z_2)^{(m-k)}$. Можно представить многообразие типа Лёбелля в виде гомотопического копредела некоторой диаграммы, а затем связать такое представление с категорными свойствами вещественного момент-угол пространства R_{K_P}.

2) Эффективно (как факторкольцо многочленов по идеалу) вычислены кольца Z_2-когомологий многообразий типа Лёбелля в случае, когда свободно действующий дискретный тор H имеет максимально возможную размерность (аналог малых накрытий), а у P либо одна идеальная вершина, либо все идеальны.

3) Если идеальная вершина не одна и идеальны не все вершины, то удается посчитать кольцо Z_2-когомологий лишь у многообразия типа Лёбелля, из которого удалили некоторое (известное) количество точек (или более сложное множество) — эти сложности возникают потому, что в таком случае нет Коэн–Маколеевости нерв-комплекса K_P

Теорема Дена о жесткости выпуклых многогранников

Иван Чеботарев

МГУ

Будет сформулирована и доказана теорема Дена о жесткости выпуклых многогранников. В конце будет сформулирована близкая открытая проблема, а именно вопрос о существовании невыпуклого многоугольника с семью вершинами.

Прямоугольные диаграммы и слоения

Михаил Чернавских

МГУ

Дынников и Прасолов ввели понятие прямоугольной диаграммы поверхности и показали, что любой класс изотопии представим прямоугольной диаграммой. Дэвид Габай доказал, что в дополнении к любому узлу существует тугое слоение конечной глубины, причем поверхность Зейферта будет компактным слоем этого слоения. В работе введено понятие прямоугольной диаграммы слоения и показано, что любое тугое слоение конечной глубины в дополнении к узлу имеет прямоугольную диаграмму.

Классификация решений локального уравнения тетраэдров

Михаил Чирков

ЯрГУ

В данном докладе будут описаны матрицы одного конкретного вида, которые являются решением локального уравнения тетраэдров. Также мы продемонстрируем основные матрицы этого класса, из которые при помощи некоторого набора операций можно получить все остальные. Этот результат тесно связан с уравнением 4-симплекса — представителем семейства уравнений N-симплекса, которые обобщают уравнение Янга-Бакстера. Мы получим некоторые приложения результата — новые отображения 4-симплекса.

Фазовые переходы в полевых моделях со спонтанным нарушением симметрии в рамках AdS/CFT соответствия

Андрей Шаврин

СПбГУ

Термодинамические явления могут быть описаны методами квантовой теории поля. Пертурбативные методы с разложением по константе взаимодействия хорошо применимы в близи критической точки, где реализуется фазовый переход второго рода. В таких системах нелинейный вклад полагается малым (слабосвязанные теории). Однако, во многих физических задачах требуется рассмотрения неравновесных процессов, в частности, фазовых переходов первого рода, в которых нелинейные эффекты модели становятся существенными (сильносвязанные теории). AdS/CFT соответствие (также известное как голографический принцип) предполагает дуальность между сильносвязанной конформной ($SO(2,d)$-симметричной) теорией поля (CFT) в плоском d-мерном пространстве и слабосвязанной теорией в $d+1$-мерном пространстве анти де-Ситтера (AdS). В данной работе обнаружена возможность фазового перехода первого рода для сильносвязанной теории (минимальная модель Составного Хиггса) через рассмотрение дуальной теории.

Нули сумм ядер Коши и их производных

Владимир Шемяков

СПбГУ

Работа посвящена вопросам распределении нулей сумм ядер Коши и их производной. Сформулированы примеры, гипотезы и результаты о распределении нулей других исследователей, уточнено распределение нулей при более сильном ограничении, по сравнению с теоремой K.Langley и J.Rossi.