

# Олимпиада по геометрии

Кафедра высшей геометрии и топологии и лаборатория геометрических методов в математической физике.

24 ноября 2011г.

**Задача 1.** Пусть прямая пересекает гиперболу в точках  $A$  и  $B$ , а ее асимптоты — в точках  $X$  и  $Y$ . Доказать, что  $AХ = ВУ$ .

**Задача 2.** Пусть  $A$  — фиксированная точка параболы  $\Gamma$ . Докажите, что все хорды  $\Gamma$ , видимые из  $A$  под прямым углом, пересекаются в одной точке.

**Задача 3.** В трехмерном пространстве дан выпуклый многогранник. Для каждой его грани  $F$  строится вектор  $\mathbf{e}_F$  перпендикулярный  $F$ , направленный вне многогранника, если его начало лежит на грани  $F$ , и равный по длине площади  $F$ . Докажите, что сумма всех построенных векторов равна  $\mathbf{0}$ .

**Задача 4.** В пространстве даны два эллипса с общим фокусом. Два эллипсоида получены вращением этих эллипсов относительно больших осей. Докажите, что все плоскости, касающиеся данных эллипсоидов проходят через одну точку или параллельны одной прямой.

**Задача 5.** Будем говорить, что тетраэдр *разбивает* параллелепипед если параллелепипед можно разбить на 6 копий данного тетраэдра. Существуют ли параллелепипед, который разбивают хотя бы два различных тетраэдра?